[Analysis und Numerik 2](#_TOC000002)

[1.1 Folgen 2](#_TOC000003)

[Schreibweisen: 2](#_TOC000004)

[Folgen als Funktionen 2](#_TOC000005)

[Arithmetische Folgen 2](#_TOC000006)

[Geometrische Folgen 3](#_TOC000007)

[Die Ackermannfunktion 3](#_TOC000008)

[1.2 Grenzwerte von Folgen 3](#_TOC000009)

[Die Koch’sche Schneeflockenkurve 3](#_TOC000010)

[Grenzwert (Limes) 4](#_TOC000011)

[Grenzwertnachweis und Grenzwertsätze 4](#_TOC000012)

[Nullfolgen 5](#_TOC000013)

[Divergenz 5](#_TOC000014)

[Beschränkte Folgen 5](#_TOC000015)

[Monotone Folgen 5](#_TOC000016)

[Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen 5](#_TOC000017)

[Grenzwert einer rekursiven Folge 6](#_TOC000018)

[Heron-Verfahren 6](#_TOC000019)

[quadratische Konvergenz 6](#_TOC000020)

[1.3 Reihen 6](#_TOC000021)

[Der Summationsindex 6](#_TOC000022)

[Partialsummen 7](#_TOC000023)

[Geometrische Summe 7](#_TOC000024)

[Reihen 7](#_TOC000025)

[Kovergenz von Reihen 7](#_TOC000026)

[Geometrische Reihe 8](#_TOC000027)

[Periodische Dezimalzahlen 8](#_TOC000028)

[Konvergenzkriterien - Notwendiges Kriterium 8](#_TOC000029)

[Konvergenzkriterien - Leibniz-Kriterium 8](#_TOC000030)

[Konvergenzkriterien - weitere Konvergenzkriterien 9](#_TOC000031)

[Konvergenzkriterien - Triage 9](#_TOC000032)

# Analysis und Numerik

## 1.1 Folgen

Definition:

Eine Folge reeller Zahlen ist eine (unendliche) Folge a0, a1, ... von reellen Zahlen ai.

### Schreibweisen:

| Angabe durch eine Formel | an = 2n |
| --- | --- |
| Angabe durch zwei oder mehr Formeln | an = 1, falls n ungerade ist  an = -n, falls n gerade ist |
| Verbale Beschreibung | an ist n² falls n eine Primzahl ist; sonst ist an = 1,  außer n = 2021 in diesem Fall ist an gleich der Anzahl der Hörer der Vorlsung Analysis und Numerik |

### Folgen als Funktionen

- Eine Folge kann als reelle Funktion mit eben dem Definitionsbereich aufgefasst werden

- Dabei wird jedem Index n € N ein Folgenglied an zugeordnet

### Arithmetische Folgen

- Formeln ähneln linearen Folgen

- an = a0 + n \* d

- Definition:

Eine Folge heißt arithmetische Folge, wenn die Differenz zweier

aufeinander folgender Glieder stets dieselbe Zahl d ergibt:

an+1 - an = d (für alle n € N)

- Satz: Ist an eine arithmetische Folge, so gilt für alle n € N:

an = a0 + n \* d

### Geometrische Folgen

- Definition: Eine Folge an mit an  != 0 heißt geometrische Folge, wenn der Quotient aufeinander folgender Glieder stets dieselbe Zahl q ergibt:

an +1 / an  = q (für alle n € N)

- Satz: Ist an  eine geometrische Folge, so gilt für alle n € N:

an = a0 \* qn

| Explizite Darstellung | Rekursive Darstellung |
| --- | --- |
| Wir berechnen für ein gegebenes n direkt das n-te Folgenglied an  Beispiel: an  = 100 + 2n | Der Wert a0 wird definiert  Jeder Wert an wird durch an-1  berechnet  Beispiel: a0 = 100  an  = an -1 + 2 für n >= 1 |

### Die Ackermannfunktion

Ackermann A(m: uns. int, n: uns. int)

- wächst so schnell, dass man mit ihr die Grenzen von Berechnungsmodellen ausreizen kann

A(m, n) =

n + 1 if m = 0

A(m-1, 1) if m > 0 and n = 0

A(m-1, A(m, n-1)) if m > 0 and n > 0

## 1.2 Grenzwerte von Folgen

### Die Koch’sche Schneeflockenkurve

- Bei jedem Schritt wird auf dem mittleren Drittel einer Seite ein gleichseitiges Dreieck errichtet

-> Dadurch steigt der Umfang beständig an

Ausgehend von der Figur F0 hat die Folgefigur Fn 3\*4n Seiten und den Umfang Un = 3\*4n \* (1/3)n = 3\*(4/3)n

Flächeninhalt der Schneeflockenkurve

- Der Flächeninhalt der Schneeflockenkurve ist endlich ( sogar < 1)

- Rekursive Vorschrift für den Flächeninhalt

An = An-1 + 3 \* 4n-1 \* (1 / 9)n \* A0 = An-1 + 3 / 16 \* 30.5 \* (4 / 9)n

- Der Umfang wächst ins unendliche

- Der Flächeninhalt stagniert im endlichen

### Grenzwert (Limes)

- Der Grenzwert der Folge Un ist unendlich:

limn->͚ Un = ͚

- Wenn eine Folge im unendlichen Raum auf einen Wert deutet, ist der Grenzwert endlich.

-> Dazu sagt man „Der Limes von <Funktion> für n gegen unendlich ist gleich <Grenzwert>“

- Folgen mit einem Grenzwert nähern sich sehr dicht, aber niemals vollständig an

Definition:

Die reelle Zahl g heißt Grenzwert der Folge an, wenn für jede Zahl e > 0 die Ungleichung |an - g| < e von einer gewissen Indexzahl N an erfüllt ist. Wenn eine Folge einen Grenzwert g besitzt, so bezeichnet man sie als konvergent und schreibt lim an = g.

### Grenzwertnachweis und Grenzwertsätze

Nachweis: Vorlesung 1, Kapitel 1, Seite 42

Grenzwertsätze: Es seien die Folgen a und b konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b dann gilt

1) lim (a + b) = a + b

2) lim (a - b) = a - b

3) lim (a \* b) = a \* b

4) lim (a / b) = a / b falls b != 0 und bn != 0

### Nullfolgen

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 wird als Nullfolge bezeichnet.

Satz: Die geometrische Folge

an = a0 \* qn

ist für |q| < 1 eine Nullfolge.

### Divergenz

Es gibt auch Folgen, die keinen Grenzwert haben. Diese folgen heißen divergent.

### Beschränkte Folgen

Definition: Eine Folge heißt nach oben/unten beschränkt, wenn es eine Zahl k gibt, so dass für alle Folgenglieder an gilt: an < k.

Ist sie nach oben und unten beschränkt, so heißt sie beschränkt.

### Monotone Folgen

Definition: Eine Folge a heißt monoton wachsend, falls für alle Folgenglieder gilt: an+1 >= an.

Sie heißt monoton fallend, falls für alle Folgenglieder das Gegenteil gilt.

Wenn die Werte an+1 > an und an+1 < an, so werden diese als *streng* monoton bezeichnet.

### Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen

Satz: Jede monotone und beschränkte Folge hat einen Grenzwert.

Damit lässt sich ableiten: Ist eine Funktion monoton und beschränkt, so ist sie konvergent.

### Grenzwert einer rekursiven Folge

Berechnung des Grenzwertes:

1) limes wird auf beide Seiten der Rekursionsgleichung angewendet

2) da Grenzwert g identisch bei n-1 und n: lim wird durch g ersetzt

3) Auflösen nach g

### Heron-Verfahren

Das Heron-Verfahren wird z. B. zur Wurzelkontrolle genutzt.

Idee: Hat ein Quadrat den Flächeninhalt a, so haben die Seitenlängen die Länge sqrt(a).

Umsetzung:

1) Seitenlängen für ein Rechteck mit dem Inhalt a suchen

2) Iterativ die Seitenlängen anpassen um das Rechteck immer quadratischer zu machen (z. B. über den Mittelwert der Seitenlängen)

=> Wiederholen, bis gewünschte Genauigkeit erreicht

3) Ergebnis prüfen

Das Heron-Verfahren ist quadratisch Konvergent.

### quadratische Konvergenz

Die Anzahl an genauen Stellen verdoppelt sich mit jedem Schritt.

WICHTIG: Genaue Stellen sind nur solche, welche sich bei mehrerern Schritten nicht verändern! Sonstige Kommastellen können sich noch verändern.

## 1.3 Reihen

### Der Summationsindex

Die Variable k (i, n, ...) wird als Summationsindex bezeichnet.

Der Summationsindex kann bei jeder Zahl beginnen.

Statt eines Wertes, können auch Bedingungen aufgestellt werden, welche die Werte definieren.

### Partialsummen

Partialsummen/Teilsummen sind Teile einer größeren Summe, z. B. die geraden Zahlen aus der Menge der natürlichen Zahlen.

### Geometrische Summe

Wenn man die Glieder der geometischen Folge ak = qk bis zum n-ten Glied aufsummiert, erhält man die geometrische Summe aller Potenzen von q bis k.

Satz: Für die geometrische Summe (mit q != 1) gilt das Bildungsgesetz:

sn = (1 - qn+1) / (1 - q)

Dadurch ist es möglich die Summe direkt zu berechnen, ohne dabei alle vorigen Summen berechnen zu müssen.

### Reihen

Definition: Die (unendliche) Folge der Partialsummen bezeichnet man auch als Reihe und schreibt dafür:

sum (int k = 1; k < ∞; ++k) a+=a(k);

| Geometrische Reihe | Harmonische Reihe |
| --- | --- |
| sum (int k = 0; k < ∞; ++k) (1/2)\*\*k; | sum (int k = 1; k < ∞; ++k) (1/k); |

### Kovergenz von Reihen

Eine Reihe ist Konvergent, wenn die Folge der Partialsummen einen Grenzwert ansteuern.

Definition: Die Reihe sum(int k=0; k < ∞;++k) (a(k)) kovergiert, falls die Folge s(n) der Partialsummen kovergiert.

Falls auch sum(k = 0; k < ∞; ++k)abs(a(k)) konvergiert, nennt man die Reihe *absolut kovergent*.

Wenn eine Reihe nicht konvergiert, sagt man, dass sie divergiert.

### Geometrische Reihe

Satz: Sei q eine reelle Zahl mit -1 < q < 1, dann konvergiert die geometrische Reihe 1 + q + q² + q³ + ... gegen den Grenzwert 1/(1-q).

### Periodische Dezimalzahlen

Periodische Dezimalzahlen sind Grenzwerte geometrischer Reihen!

Mittels der Darstellung als Summe lassen sich die Bruchdarstellungen von periodischen Dezimalzahlen finden:

0,222222222... = 0,2 + 0,02 + 0,002 + ... = 0,2 \* (1 + 0,1 + 0,001 + ...)

= 0,2 \* sum(k=0;k<∞)(1/10)k

= 0,2 \* (1/(1-1/10)) => Grenzwertformel der geometrischen Reihe

= 2/9

Aus dieser Darstellung ergibt sich, dass 0,999... = 1 und nicht nur ungefähr 1 ist.

### Konvergenzkriterien - Notwendiges Kriterium

- Damit eine Reihe konvergent ist, muss die Folge eine Nullfolge sein

=> ist die Folge keine Nullfolge, ist die Reihe divergent

ACHTUNG: Die Umkehrung dieses Kriteriums ist nicht möglich!

=> Eine harmonische Reihe ist eine divergente Reihe, deren Folge eine Nullfolge ist

Bsp. einer harmonischen Reihe: sum(k=1; k < ∞)(1/k)

### Konvergenzkriterien - Leibniz-Kriterium

Wenn die harmonische Reihe Schrittweise das Vorzeichen wechselt, so handelt es sich um eine *alternierende* Reihe. Dies beweist das Leibniz-Kriterium:

Satz (Leibniz-Kriterium):

Wenn a(n) eine monoton fallende Nullfolge ist, dann kovergiert die alternierende Reihe sum(k=0; k < ∞)(-1)k \* a(n)

### Konvergenzkriterien - weitere Konvergenzkriterien

| Majorantenkriterium | Quotientenkriterium | Wurzelkriterium |
| --- | --- | --- |
| Sei sum(∞)(a(k)) eine Reihe und sei sum(∞)(b(k)) eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern bi. Wenn |ai| <= bi. Wenn |ai| <= bi für alle hinreichend großen i gilt, dann kovergiert auch die Reihe sum(∞)(a(k)).  => wenn a dauerhaft zwischen Achse und b liegt, ist a konvergent | Wenn lim∞|(a(k+1))/a(k)| < 1  gilt, dann konvergiert die Reihe.  => zwei Werte vergleichen, gute Werte dafür suchen | Wenn lim∞rt(|a(k)|,k) < 1 gilt, dann konvergiert die Reihe.  => Einsetzen und Spaß haben |

### Konvergenzkriterien - Triage

Gegeben ist eine Reihe sum(∞)a(k)

Ist a(k) eine Nullfolge?

Nein: Reihe ist divergent.

Ja: Ist die Reihe eine Variante einer bekannten Reihe?

Ja: Konvergenz wird durch Majorantenkriterium bestimmt.

Nein:

Ist a(k) = (-1)k \* bk und bk eine monoton fallende Nullfolge?

Ja: Reihe ist konvergent nach Leibniz.

Nein: Ist das Quotientenkriterium erfüllt?

Ja: Reihe ist konvergent

Nein: Reihe ist divergent.

## 2.1 Grenzwerte von Funktionen

### Grenzwertuntersuchung mit Testfolgen